第 14 講　図形の計量

PART1　三角形の面積

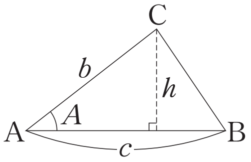
要点 ①　三角形の高さと面積

三角比を用いて，三角形の面積を求める。

△ABC において，辺 AB を底辺としたときの高さを h とする。

(i)　A が鋭角のとき

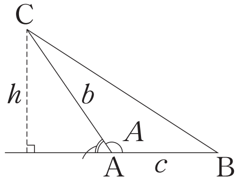
$\sin A=$ ― より $h=$



(ii)　A が鈍角のとき

$\sin(180°-A)=$ ― より

$h=b\sin(180°-A)=$



(i), (ii)より $h=b\sin A$ である。

また，A が直角のときも $h=b=b\cdot 1=b\sin 90°=b\sin A$ である。

したがって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A$$

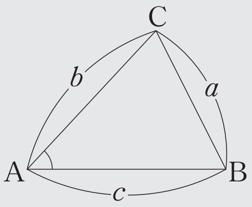
よって，△ABC の面積 S は，2 辺の長さ b，c とその間の角の正弦の値 $\sin A$ で表される。

以上より，次のことが成り立つ。

三角形の面積

△ABC の面積を S とすると

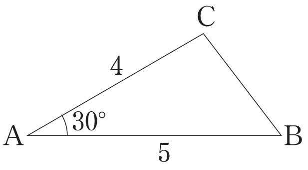
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$



例　△ABC において，$b=4$，$c=5$，$A=30°$ のとき，△ABC の面積 S を求める。

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ \cdot\ \cdot \qquad =\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=5$$

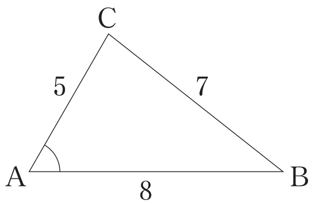


要点 ② 3 辺の長さから三角形の面積を求める

余弦定理を利用して，3 辺の長さが与えられた三角形の面積を求める。

例 $a=7$，$b=5$，$c=8$ である △ABC の面積 S を求める。

余弦定理より



$$\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{40}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{2}\qquad A=$$

よって $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin$

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$

※$\cos A=\frac{1}{2}$ より，三角比の相互関係 $\sin^2A+\cos^2A=1$ から

$$\sin^2A=1-\cos^2A=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=$

よって $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\qquad=10\sqrt{3}$

1 次の △ABC の面積 S を求めよ。

(1) $b=4,\ c=7,\ A=60^\circ$

(2) $a=5,\ b=3,\ C=135^\circ$

(3) $c=8,\ a=6,\ \sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

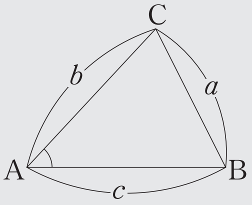
(4) $a=\sqrt{13},\ b=2,\ c=\sqrt{3}$

Point Pickup

三角形の面積

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$



2 辺とその間の角(またはその間の角の正弦の値)が与えられた場合は，この公式で面積を求めることができる。

3 辺の長さが与えられたときは，以下の手順で三角形の面積を求める。

① 余弦定理より $\cos A$ の値を求める。

② $\cos A$ から角度 A が求められる場合は求める。
角度 A が求められない場合は，三角比の相互関係 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ を用いて $\sin A$ の値を求める。

③ 公式を用いて面積を求める。

第14講 PART1 確認問題

1 △ABC において，$b=3$，$c=4$，$A=60^\circ$ のとき，面積は

$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ である。

2 △ABC において，$a=4$，$b=3\sqrt{2}$，$C=45^\circ$ のとき，面積は $\boxed{ウ}$ である。

3 △ABC において，$c=5$，$a=3$，$\sin B=\dfrac{2}{3}$ のとき，面積は $\boxed{エ}$ である。

4 △ABC において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，

$\cos A=-\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{\boxed{キク}}}{\boxed{ケ}}$ であるから，面積は

$\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サシ}}}{\boxed{ス}}$ である。

第 14 講　図形の計量

PART1　三角形の面積

1　次の △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$b=4$，$c=7$，$A=60^\circ$

(2)　$a=5$，$b=3$，$C=135^\circ$

(3)　$c=8$，$a=6$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(4)　$a=\sqrt{13}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}$

[解答]

(1)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot7\cdot\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot7\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\sin135^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$

(3)　$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=6\sqrt{7}$

(4)　余弦定理より

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}=\frac{4+3-13}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}=\frac{-6}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A=150^\circ$

よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin150^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第14講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：3

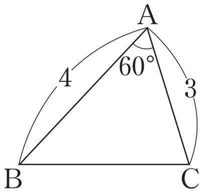
[解説]

△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3\sqrt{3}}$$

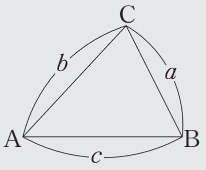


[A]　△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$



2

[正解] ウ：6

[解説]

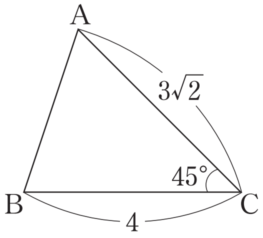
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{6}$$

[B]　2辺とその間の角が与えられた場合，公式で面積を求められる。

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$



3

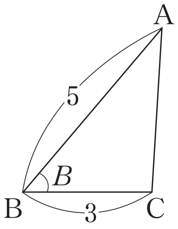
[正解] エ：5

[解説]

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\mathbf{5}$$



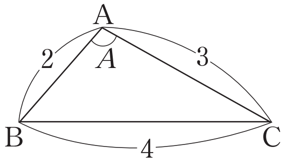
[C]　2辺とその間の角（またはその間の角の正弦の値）が与えられた場合，公式で面積を求められる。

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B$$

4 **[正解]** オ：1，カ：4，キク：15，ケ：4，コ：3，

サシ：15，**ス**：4

[解説]



余弦定理より，[D] [E]

$$\cos A = \frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}$$

$$= \frac{9+4-16}{2\cdot3\cdot2}$$

$$= -\frac{3}{2\cdot3\cdot2} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A$$ [F]

$$= 1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$\sin A>0$ より，$\sin A = \sqrt{\frac{15}{16}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$

よって，面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$= \frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{15}}{4}}$$

[D]　$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$

$\Longleftrightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

[E]　3 辺の長さが与えられた場合の面積を求める手順

①余弦定理より $\cos A$ の値を求める。

②$\cos A$ から角度 A を求め，$\sin A$ の値を求める，または，三角比の相互関係より，$\sin A$ の値を求める。

③公式を用いて面積を求める。

[F]　三角比の相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$